Fourier定理之研究

Shibin ZHU

FOURIER 定理之研究

朱士賓

近世物理學及電磁學應用 Fourier 定理者甚多，凡有週期性之現象均可賴此表明之，而熱能之傳佈理論更藉此益彰焉。該定理之用途初非僅限於物理學或電磁學而止也，舉凡一切數理分析學均有重大之應用焉。是故明曉該定理之性質之用途實爲至要。然則該定理所言爲何？所用若何？今試述其緣起俾吾人有更大之興味焉。當十八世紀中葉數學家有一相同之疑題：即謂任何一週期函數能否以一無窮系數代之，其時理說紛紜莫衷一是，迨至 Fourier 氏研究熱能傳佈後始確定之曰：凡週期函數不論屬人爲者抑屬自然者，均可用無窮三角系數表出之，其係數均爲一定之恒數焉。後世因名曰 Fourier 定理，今特分節論之如下。又本篇所討論者祗及其數理上之應用，至其積分方式及理論均未論及焉。

I. 週期函數

在一數學方式中每有兩類之數：一曰恒數，一曰變數，其區別如後；恒數爲一符號常代表其值，變數亦爲一表數之符號，不過其數值常隨他數之關係變遷而已。 如有兩變數於此， 若假定一變數爲某值時，他變數即可求得其值，此變數名爲前者之函數。如在某數段內或允於兩極限之變數令其函數爲某值，外此數段者令爲他值，如此類之函數名曰人爲函數。通常習見之數學方式名曰自然函數，蓋其值除方

式所指示者外別無他項限制也。

若將函數作圖則成一曲線，當變數爲某値時，曲線分斷，該函數謂有數量(Magnitude)不連續性，如其斜角(Slope)有互異之變遷，函數謂有斜角不連續性；如其曲度(Curvature)有不同之變遷，函數謂有曲度不連續性，總言之，函數之一次二次……至N次之微分係數常有不連續性也。

何謂週期函數？曰函數之性質在某週期內顯現能復在別一週期重見，如此繼續以至無窮次之謂也。其週期均假定爲 2π，其類別可分爲四類。(普通者不與焉)

第一類名曰Sine-harmonic function。在此類中之週期函數，如原點能適宜選定，可使 $f(t)=-f(-t)$。換言之該函數之圖形在第一週期中與在第二週期內者相同不過一在橫坐標線上一在其下而已。因名曰奇函數。例如Sine-curve。

第二類名曰Cosine-harmonic function。在此類中之週函數，如原點能適宜選定，足使 $f(t)=+f(-t)$。意謂該函數之圖形在第一週期中與在第二週期者無異，且同在橫坐標線上或下也，因名曰偶函數。例如Cosine-curve。

第三類名曰 Odd-harmonic function. 此類函數與原點無關，常使 $f(t+\pi)=-f(t)$。意謂該函數之圖形，在第一週期中移前或移後半週期所得之圖形，與在第二週期內者無異，不過一在橫坐標線上一在其下而已。

第四類名曰bi-Symmetric function。此類函數之圖形有最多相同之處，每$\frac{1}{4}$週期與別一$\frac{1}{4}$週期之圖形完全無異。此類函數含有第一，第二，及第三，叁類，當視原點之如何選定而已。

II. Fourier 定理

Fourier定理曰凡任何週期函數，如週期為2π或其倍數者，則不論屬人為函數抑屬自然函數均可用下列系數表出之：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}\begin{array}{l}+a_1\cos t+a_2\cos 2t+a_3\cos 3t+\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +b_1\sin t+b_2\sin 2t+b_3\sin 3t+\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\Bigg\} \quad (1)$$

其中之系數均為一定之恆數，其數值可用下列方式求得之：

$$\left.\begin{array}{l} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt \end{array}\right\} \quad (2)$$

本定理之是否真確，吾人暫不能証明之，惟假定上列系數能代表該函數$f(t)$，則可証明其係數必如上列方式所指出者。

試將第一式兩邊用$\cos nt\,dt$乘之，再在$t=0$及2π兩極限依變數t積分之，可得下列之方式實與第二式無別也。在積分第一式之右邊各項均等於零，蓋積分$\cos rt\cos ntdt$或$\sin rt\cos nt\,dt$(由$t=0$至$t=2\pi$)均等於零也；惟末項$a_n\cos Nt$則否，蓋用$\cos Nt\,dt$乘之便得$\cos 2Ntdt$，積分之不等於零。故a_n之數值可如下式求得之：

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt=a_n\int_0^{2\pi}\cos^2 Nt\,dt=\frac{a_n}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2nt)dt=\pi a$$

所得之值實與第二式無別也。如將第一式兩邊以$\sin nt\,dt$乘之如上法積分之，各項均等於零，惟$b_n\sin nt$則否，蓋其積為$b_n\sin^2 nt\,dt$也。由此可求得q_n之數值，

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt=b_n\int_0^{2\pi}\sin^2 nt\,dt=\frac{b_n}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2nt)=\pi b_n$$

所得之值與第二式無別也。

將 Fourier 定理應用於上述之四種函數中可得下列之化簡式。在上列或下列式中各項之含有正弦者名曰 Sine-hormonic，含有餘弦者名曰 Cosine harmonic 由此可見上述四種函數之命名矣。

第一類爲週期奇函數常使$f(t)=-f(-t)$；換言之

$f(t)=\frac{1}{2}\Big(f(t)-f(-t)\Big)$。Fourier 之系數爲

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos t+a_2\cos 2t\cdots\cdots+b_1\sin t+b_2\sin 2t\cdots\cdots$$

將 t 改爲 -t 可得下列之數式

$$f(-t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos t+a_2\cos 2t\cdots\cdots-b_1\sin t-b_2\sin 2t\cdots\cdots$$

照上列方式代入便得一數式祗含正弦項者

$$f(t)=b_1\sin t+b_2\sin 2t+\cdots\cdots \qquad (3)$$

凡屬此類之函數均可用此式(3)代表之

第二類爲偶週期函數常使$f(t)=+f(-t)$；換言之

$f(t)=\frac{1}{2}\Big(f(t)+f(-t)\Big)$。

如上法代入可得一數式祗含有餘弦者

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos t+a_2\cos 2t+\cdots\cdots \qquad (4)$$

凡屬此類函數可用(4)式代表之

第三類週期函數可使$-f(t)=f(t+\pi)$；換言之

$$f(t)=\frac{1}{2}\Big(f(t)-f(t+\pi)\Big)$$

今將 Fourier 系數中之 t 改爲$(t+\pi)$可得下列數式

$$-f(t+\pi)=-\frac{a_0}{2}+a_1\cos t-a_2\cos 2t+a_3\cos 3t+\cdots\cdots+$$

$$+b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + b_3 \sin 3t + \cdots\cdots$$

照上列方式代入便得一方式祇含奇數之正弦及餘弦項者

$$f(t)=a_1 \cos t + a_3 \cos 3t \cdots\cdots + b_1 \sin t + b_3 \sin 3t \cdots\cdots (5)$$

凡屬此類之函數均可用此式(5)代表之。以上三種函數之命名亦可想見矣。

以上三種函數中之係數均可照前述方式求得其值，不過式(2)在此三種函數內可較爲化簡。第一類爲奇函數，而 $\cos nt$ 爲偶其積 $f(t) \cos nt$ 爲奇故在 $t=0$ 至 $t=2\pi$ (或 $t=-\pi$ 至 $t=\pi$ 兩者均無異) 兩極限積分之均等於零，故函數中無餘弦項也。故第一類奇函數中之係數可用下式求之

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t) \sin nt\, dt \qquad (5)$$

依相似之理由第二類偶函數之係數可依下式求得之

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t) \cos nt\, dt \qquad (6)$$

第三類凡屬偶項者均等於零，奇項在 $-\pi$ 至〇兩極限中與在〇至 π 者數值均相等不過一爲正數一爲負而已；故可書其系數之值如下式

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t) \cos nt\, dt \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t) \sin nt\, dt \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

第四類函數具有上述三種函數之性質，盤視乎原點之如何選定而已。例如有第四類之函數如所選之原點足使爲奇函數者便可用下列數式代表之

$$f(t)=b_1 \sin t + b_3 \sin 3t \cdots\cdots (8)$$

蓋第四類函數之圖形在第一週期內之圖形移前或移後半週期所成之圖形與在第二週內者相同，不過一在橫坐標軸上一在其下而已，故第四類函數實含有第三類之函數。且第四類函數每$\frac{1}{4}$週與別一$\frac{1}{4}$週之圖形無異，換言之變數 t 在$-\frac{\pi}{2}$至〇及由〇至$\frac{\pi}{2}$所成之函數相等不過一在橫坐標上，一在其下而已。故其係數之數值可書如下：

$$b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin nt\,dt \qquad (9)$$

依相似理由第四偶函數之係數爲

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos nt\,dt \qquad (10)$$

第一及第二兩種函數吾人求係數之值時祗演算一式便足，但在第三類函數或普通週期函數求 a_n 及 b_n 值時，則須演算二式頗爲冗繁；今有一較便之方法能使演算化簡者如下：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt$$

今將 b_n 以 i 乘之便得下列數式：

$$a_n+ib_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\cos nt+i\sin nt\right]dt=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{int}\,dt \qquad (10)$$

求得其值再令實數與實數相等，虛數與虛數相等便得 a_n 及 b_n 之值焉。

如函數在某數段中有數量，或斜角，或曲度，或 n 次微分係數有不連續性時，Fourier 系數中之各係數可依下法求之。

如函數當變數之値爲 a, b, c……等時有數量不連續性，通常所用之方式表明此意者爲$f(a+o)$及$f(a-o)$，較簡之式爲 Ia,Ib,Ic，等等，如斜角有不連續性則用I'a I'b,I'c等,曲度有不連續時則用I''a I''b,I''c,等。第十方式所書a_n及b_n之値如下

$$a_n+ib_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{int}\,dt$$

苟以部份法積分之可得下式

$$a_n+ib_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{f(t)\,e^{int}}{in}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{\pi\,in}\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}\,dt$$

今爲簡便故假定當$t=o$, $f(t)$爲連續；又令 $t=o$至$t=a$,$f(t)$爲一値；$t=a$至$t=2\pi$,$f(t)$ 又令爲一値，換言之 $f(t)$ 在a 處有數量不連續性時，則上式右邊首項之値爲

$$\frac{1}{\pi in}\left\{f(a-o)\,e^{ina}-f(o)e^{ino}+f(2\pi)e^{in2\pi}-f(a+o)e^{Ina}\right\}$$

但 $f(2\pi=f(o)$；又$e^{2\pi in}=e^{Ino}$，故上式更可化簡之爲：一

$$\frac{-e^{ina}}{\pi\,in}\left\{f(a+o)-f(a-o)\right\}=+\frac{iIa\;e^{ina}}{\pi\,n}$$

如函數在2π 中在 $t=a, b, c,$ ……等處有數量不連續性均可照上法爲之，其結果爲

$$\frac{i}{\pi\,n}\sum_{k=a}^{k=r} I_k\,e^{ink}$$

若將前述方式第二項$-\frac{1}{\pi in}\int f(t)e^{int}dt$ 應用部份法積分之可得下式：

$$\frac{-I}{\pi in}\left[\frac{f^{1}(t)e^{int}}{in}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{\pi i^2n^2}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{int}\,dt$$

用上述同一方法首項之數值爲：

$$-\frac{I}{\pi n^2}\sum_{k=a}^{k=r} I'_k e^{ink}$$

如此繼續可得 a_n 及 b_n 之數值焉，其式如下：

$$\pi(a_n+ib_n)=\frac{i}{n}\sum I_k e^{ink}-\frac{I}{n^2}\sum I'_k e^{ink}-\frac{I}{n^3}\sum I''_k$$

$$e^{ink}+\frac{I}{n^4}\sum I'''_k e^{ink} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

III Fourier定理在人爲週期函數之應用

普通之自然週期函數固可用一無窮系數代表之，但人爲週期函數之是否可能，吾人實未敢下一肯定斷語。若在某數段內令其變數之函數爲某値，在此段之外者又將如何表示之，如應用 Fourier 定理則此疑題可立解之，蓋 Fourier 之系數初非僅限於段內，段外者亦可代表之也。今舉數例以明其法：

例一：今有一偶週期函數其週期爲2π，當 $t=o$ 至 $t=a$時 $f(t)=h$，又由 $t=a$ 至 $t=\pi$時 $f(t)=o$，試以 Fourier 系數表出之。

吾人旣知函數爲偶則可應用式(4)代表之

$$f(t)=\frac{a_o}{\pi}+a_1\cos t+a_2\cos 2t+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$$

將上題代入上式中可得 a_n之値

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{a} h\cos nt\,dt=\frac{2h}{\pi n}\sin na$$

在 $t=a$至 $t=\pi$時 a_n 各值均等於零，故該系數爲

$$f(t)=\frac{2h}{\pi}\left\{\frac{a}{2}+\frac{\mathrm{Sin}\,a}{1}\cos t+\frac{\sin 2a}{2}\cos 2t\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{Sin}\,3a}{3}\cos 3t+\cdots\cdots\cdots\right\}$$

例二： 今有--奇週期函數由 $t=o$ 至 $t=a$ $ft=\frac{ht}{a}$；

又由 $t=a$ 至 $t=\pi$，$f(t)=h\left(\frac{\pi-t}{\pi-a}\right)$。試用 Fourier 系數表明之。

此題與前題不同，前者爲偶函數今者爲奇函數，前者有數量不連續性，今者有斜角不連續性。此類函數可用式(3)表示之

$$f(t)=b_1\sin t+b_2\sin 2t+b_3\sin 3t+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\sin nt\,dt$$

如將上式應用部份積分法便得

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left[\frac{f(t)\cos nt}{-n}\right]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}f'(t)\cos nt\,dt$$

該函數有斜角不連續性故須將由 o 至 π 之極限分爲二：一由 o 至 a，又一由 a 至 π 然後積分之，其理由請觀式(11)。上式首項在極限 o 至 π 中等於零，故所餘者爲末項，

$$b_n=\frac{2}{\pi n}\left\{\frac{h}{a}\int_0^{a}\cos nt\,dt-\frac{h}{\pi-a}\int_0^{\pi}\cos nt\,dt\right\}$$

$$=\frac{2h}{\pi n}\left\{\frac{\mathrm{Sin}\,na}{na}+\frac{\mathrm{Sin}\,na}{n(\pi-a)}\right\}=\frac{2h\sin na}{a(\pi-a)n^2}$$

該系數可書爲

$$f(t)=\frac{2h}{a(\pi-a)}\left\{\frac{\sin a}{1}\sin t+\frac{\sin 2a}{4}\sin 2t+\frac{\sin 3a}{9}\sin 3t\cdots\cdots\right\}$$

例三： 今有一週期函數在 $t=0$ 至 $t=\pi$, $f(t)=\frac{h}{\pi}t$; 又在 $t=\pi$ 至 $t=2\pi$；$f(t)=0$。試用 Fourier系數表出之。

此函數爲一普通之週期函數不屬於某一類，可用式(1)表出之：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos t+a_2\cos 2t\cdots\cdots+b_1\sin t+b_2\sin 2t\cdots\cdots$$

其中係數之數值可用式(10)求之如下：

$$a_n+ib_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{int}dt=\frac{h}{\pi^2}\int_0^{\pi}te^{int}dt$$

用部分法積分之可得

$$a_n+ib_n=\frac{h}{\pi^2}\left[\frac{te^{int}}{in}\right]_0^{\pi}-\frac{h}{\pi^2 in}\int_0^{\pi}e^{int}dt$$

$$=\frac{h}{\pi^2}\cdot\frac{\pi e^{in\pi}}{in}+\frac{h}{\pi^2 n^2}\left(e^{in\pi}-e^{in0}\right)$$

但 $e^0=1$，$e^{i\pi n}=(\cos\pi)^n=(-1)^n$；將上列方式令虛數相等，實數相等，便得$a_n$及$b_n$之値如下：

$$a_n=\frac{h}{\pi^2 n^2}\left\{(-1)^n-1\right\}，b_n=\frac{h}{\pi n}(-1)^{n-1}$$

故該系數爲

$$f(t)=h\left\{\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\cos t}{1}+\frac{\cos 3t}{9}+\frac{\cos 5t}{25}\cdots\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1}-\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 3t}{3}\cdots\cdots\cdots\right)\right\}$$

其他人爲函數之表示法均可依上例法爲之。

IV Fourier 定理在實驗函數之應用

吾人爲一試驗所得之結果在坐標紙上常爲一組或數組之點，表出一種現象與別種現象之關係；或爲一組或數組之數目字互生關係。苟欲明曉其關係或存於其中之律例，則必須先求一函數足以代表此種數目者研究之，當較易於從事一組無系統之點或數目也。如能確定所得之結果含有週期性者則 Fou ier 定理實一代表之最簡方法也。

如所得之結果爲一組或數組之數目字，可先假定任何一組爲別組之函數，再將兩者作圖便得一組之點。欲得一函數代表此組點者有二法，其爲理亦各異。其一，吾人可求 Fou.ier 之系數，使其曲線經過諸點，此系數便爲所欲得之函數。其二，吾人可將各點以直線連結之，或用二次，三次拋物線之弧穿連之，使成一曲線含有不連續性者，由此不連續性應用 Fourier 系統便得一函數代表諸點焉。此種函數名曰實驗函數，其準確程度自視實驗之精良與否而定。今分論其法如下：

今假定在 2π 週期中共有 $2p$ 點如下：

$$\left(\frac{\pi}{p}, A_1\right), \left(\frac{2\pi}{p}, A_2\right) \cdots\cdots\cdots (2\pi, A_{2p})$$

該系數經過以上各點者爲：一

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos t+a_2\cos 2t+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_p\cos pt$$

$$+b_1\sin t+b_2\sin 2t+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_p\sin pt$$

不過係數之值須確定之而已。按上式觀察現有 $2p+1$ 個未知數，而方程式祇有 $2p$ 條，實不能決定其值。如使 $t=n\frac{\pi}{p}$, $(pt=n\pi)$, n 爲一整數則可使上式最末正弦項等於零，如是則係數之值遂定，可得下列之化簡式。

$$f(t)=\frac{a_o}{2}+a_1\cos t+\cdots\cdots\cdots+a_{p-1}\cos(p-1)t+\frac{a_p}{2}\cos pt$$

$$+b_1\sin t+\cdots\cdots\cdots+b_{p-1}\sin(p-1)t$$

若將上列諸點之橫坐標代入，便得 $A_1, A_2\cdots\cdots\cdots A_{2p}$ 共有 $2p$ 條方程式，若將每條依次用 $\cos\frac{n\pi}{p}$, $\cdots\cdots\cos\frac{2n\pi}{p}$, $\cdots\cdots\cos\frac{2pn\pi}{p}$ 乘之，再相加則可見除 a_n 項外，各項均互消，其結果如下：

$$a_n\lessgtr\cos^2\frac{q_n\pi}{p}=\lessgtr A_q\cos\frac{qn\pi}{p}$$

但 $\cos 2\Theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\Theta)$，上式左邊可見等於 p (因 q 由 0 至 2p) 在 $n=o$ 及 $n=p$ 時，上式右邊爲 $2p$，故上式首式及 p 項之係數以 $\frac{a_o}{2}$ 及 $\frac{a_p}{2}$ 代之使其一致也，故可書

$$a_n=\frac{1}{p}\lessgtr A_q\cos\frac{q_n\pi}{p}$$

應用相似方法 (用 $\sin\frac{n\pi}{p}$, $\sin\frac{2n\pi}{p}\cdots\cdots\sin\frac{2pn\pi}{p}$ 乘 $2p$ 方程式，可得

$$b_n=\frac{1}{p}\lessgtr A_q\sin\frac{q_n\pi}{p}$$

由是係數確定前題亦因之得解。如令 p 爲無窮大則 $\frac{1}{p}$ 甚小且等於 $\frac{1}{\pi}$ 兩直坐標之距離，但此距離爲 dt (如 $P=\infty$)，相加時乃由 $t=\frac{\pi}{p}$ 至 $t=2\pi(p=\infty)$ 故上列係數之方式實與 Fourier 氏之式無異

$$\frac{1}{p}\lessgtr A_q\cos\frac{qn\pi}{p} \text{ 即爲 } \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}A_t\cos nt\,dt \qquad (A_t=f(t))$$

讀者如應用上式於前述四種函數中，所得之數式當較簡便於此也。

以下所述者爲應用第二法代表函數。

設在 2π 週期中有 $2p$ 相等距離之直坐標 $y_0, y_1, y_2, \cdots\cdots y_{2p}$,

其距離爲 $\dfrac{\pi}{p}=a$, 若將各坐標項點以直線穿連之便成一曲線含有斜角

不連續性，斜角在 y_0 及 y_1 者爲 $\dfrac{y_1-y_0}{a}$ 在 y_2 及 y_1 者爲 $\dfrac{y_2-y_1}{a}$

故兩斜相差(在 y_1 處)爲 $\dfrac{y_2-2y_1+y_0}{a}$ 卽爲 $\dfrac{p\triangle^2 y^1}{\pi}$

若將前述第十一式

$$\pi(a_n+ib_n)=\frac{i1}{n}\leqq Ike^{ink}-\frac{i}{n^2}\leqq I_k e^{ink}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中之 e 項改書爲 (cos nk + isin nk) 再將實數相等，虛數相等便得 a_n 及 b_n 之值如下：

$$\pi a_n=\frac{1}{n}\leqq I_k \sin nk-\frac{1}{n^2}\leqq I'_k \cos nk+\frac{1}{n^3}\leqq I''_k \sin nk\cdots$$

$$\pi b_n=\frac{1}{n}\leqq I_k \cos nk-\frac{1}{n^2}\leqq I'k \sin nk-\frac{1}{n^3}\leqq I''_k \cos nk\cdots$$

將上列所得之結果應用於此式便得代表此等曲線之系數爲：一

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+a_1 \cos t+\cdots\cdots\cdots+a_p \cos pt$$

$$+b_1 \sin t+\cdots\cdots\cdots+b_p \sin pt$$

其係數之值爲一

$$a_n=-\frac{p}{\pi^2 n^2}\leqq\triangle^2 y \cos\frac{n\pi}{p}$$

$$b_n=-\frac{p}{\pi^2 n^2}\leqq\triangle^2 y \sin\frac{n\pi}{p}$$

其他如應用二次或三次拋物線之弧以連貫坐標項點者，亦可依上法爲之。

V Fourier 定理之証明

前數節所言者均假定Fourier系數爲眞確，能代表一週期函數；今所欲言者爲確定該系數有如上述之性質。在第三節中吾人經已証明其係數之價值，反言之如該系數爲眞確其系數必如前述之恒數。今先察一週期函數是否能以一無窮系代表之，次用直接加法証明 Fourier 系數之和等於取欲代表之函數。

若$f(t)$之週期爲 2π，到$f(t+2\pi)=f(t)$，應用 Taylor 定理

$f(t+2\pi)=e^{2\pi D}f(t)$ $\left(其中\ D\equiv\frac{d}{dt}\right)$，可得下列一方程式

$$\left(e^{2\pi D}-1\right)f(t)=0$$

試察此方程式除D等於零外無實根；如令$D=ix$便得

$$e^{2\pi ix}=1$$

或可將 e 項改書爲

$$\cos 2\pi x+i\sin 2\pi x=1$$

換言之 $\cos 2\pi=1 \quad \sin 2\pi x=0$

由此可知x可爲任何整數e，故凡任何週期函數可用下式表之：

$$f(t)=c+A_1\cos t+A_2\cos 2t+\cdots\cdots$$
$$+B_1\sin t+B_2\sin 2t+\cdots\cdots$$

其中係數必如Fourier系數者明矣！

今用直接加法明其系數之和爲 $f(t)$如下：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos t+\cdots\cdots+b_1\sin t+\cdots\cdots$$

其中係數之值爲 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos nt\,dt$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

今將積分式之變數改為 x,再將 $\cos nt$ 乘 a_n 式，$\sin nt$ 乘 b_n 式，兩者相加便得：—

$$a_n\cos nt+b_n\sin nt=\frac{1}{\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(x)\cos n(x-t)\,dx$$

將極限加或減 π 不影響於積分式也。

若將 $x=u+t$ 上式變為

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+u)\cos nu\,du$$

若令 s_n 為上述系數之和，便得下式：—

$$S_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+u)\left\{\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+\cdots\cdots\cdots+\cos nu\right\}du$$

但 $\cos ru=\frac{1}{2}\left(e^{iru}+e^{-iru}\right)$

將此數值代去 cos 項便得其和為 $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}$

故 S_n 之式可書為

$$S_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+\pi)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}du$$

再將 $\left(n+\frac{1}{2}\right)u$ 令等於 v, 又 n' 令等於 $n+\frac{1}{2}$; 上式可化為

$$S_n=\frac{1}{\pi}\int_{-n'\pi}^{n'\pi} f\left(t+\frac{v}{n'}\right)\frac{\sin v}{2n'\sin\frac{v}{2n'}}\cdot dv$$

若 n' 為無窮大 $\sin\frac{v}{2n'}$ 便為 $\frac{v}{2n'}$; $f\left(t+\frac{v}{n'}\right)=f(t)$，故可書為

$$S_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(t)\frac{\sin v}{v}dv$$

在此積分式中 f(t)爲恆數，因吾人依變數 u 而積分也故可書爲

$$S_n=\frac{f(t)}{\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\sin v}{v}dv$$

今欲確定積分號內之式爲何值，須先研究下列之式，然後可以証明 f(t)卽等於 Sn

吾人凡經學習積分者必知 $\int e^{cx}dx=\frac{e^{cx}}{C}$；其中之恆數 c 可有任何之數值，若命 $c=-a+ib$，則可得

$$\int_0^{\alpha} e^{cx}dx=\int_0^{\alpha} e^{-cx}\cdot e^{ib}=\int_0^{\alpha} e^{-ax}(\cos bx+i\sin bx)dx$$

$$=\left[\frac{e^{(-a+ib)x}}{-a+ib}\right]_0^{\alpha}=\frac{-1}{-a+ib}=\frac{a+ib}{a^2+b^2}$$

今實數等於實數，虛數等虛數便得

$$\int_0^{\alpha} e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^{\alpha} e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}$$

第一式之值如 x 之值定後，可將 b 之值稍變，全式之值亦變，故積分式實爲 b 之函數若將式之二邊以 db 乘之再由 o 至 b 積分之可得下式（x 現爲恆數）：

$$\int_0^{b}\int_0^{\alpha} e^{-ax}\cos bx\,db=\int_0^{b}\frac{a}{a^2+b^2}db$$

$$\int_0^{\alpha}\int_0^{b} e^{-ax}\cos bx\,db\,dx=\int_0^{b}\frac{a}{a^2+b^2}db$$

$$\int_0^{\alpha} \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

若令 $\begin{matrix} a=0 \\ l=1 \end{matrix}$ 上式變爲

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin x}{x} dx = \tan^{-1} \alpha = \frac{\pi}{2}$$

故前述之 S_n 式

$$S_n = \frac{f(t)}{\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sin v}{v} dv = \frac{f(t)}{\pi} \cdot \pi = f(t)$$

由此証明 Fourier 系數之和實爲 f(t)。如 f(t) 有不連續性可將極限分析，所得之結果均如上焉。

VI Fourier定理發展經過

在 1777 年 Euler (1707—1783) 已悉任何一週期自然函數可用一無窮系數代表之，他所求得之系數一若 Fourier (1768—1830)氏所得者，不過 Fourier 証明人爲函數亦能利用如是方法而已。當時其理論未能確立，蓋受數學家之反對也。及後 Fourier 研究熱能將其理論刊出(Therie Analytigue de La Chaleur 1822)始漸確立。

Poisson (1781—1840) 及 Dirichlet (1805—1859) 兩氏將 Fourier 系數以直接加法證明其定理。Dirichlet 更證明不論 t 爲任何數值，Fourier 系數之和爲 f(t)；若 t 能使函數有不連續性，其和爲

$$\frac{1}{2}\left\{ f(t-o)+f(t+o) \right\}$$

將實驗結果以 Fourier 系數代表之，實爲一新近之創作，想當時缺乏精良儀器，實驗自無良好之結果，故數學家無是類之設想而已。Lagrange (1736—1813) 曾求得一正弦系數經各相等距離直坐標之頂點，Poisson 更將其演算擴大，使所成之系數含有正弦及餘弦等項，

此實開後世實驗函數代表法也。及後 Lord Rayleigh (1842－1919)更証明

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t) \cos at \, dt \equiv A$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t) \sin at \, dt \equiv B$$

又

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)^2 \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\alpha} (A^2 + B^2) \, da$$

凡求週期運動之能者均須應用後式焉。

參考書：— Mellor Joseph Wiliam:- Higher Mathematics for Student of chemistry and physics.

P. A. Lambert- Differential and Integral Calculus.

Benjamin Williamson:- An Elementary Treatise on The Integraal Calculus

I. Todhunter;- Integral calculus.

Abbert Eagle's-Fourier's Theorem and Harmoms Analysis.